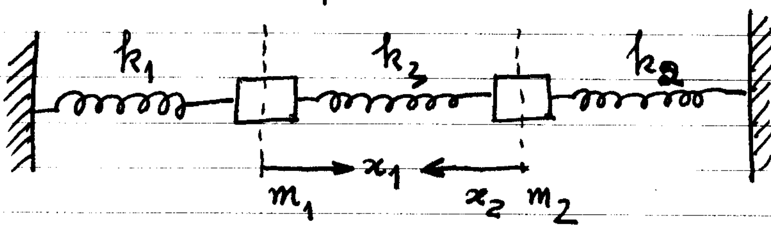
§ Osciladores harmônicos acoplados



Assumimos que o movimento é unidimensional, sendo (x_1, x_2) as coordenadas das partículas medidas desde a posição de equilíbrio. Quando $k_3 = 0$, os osciladores 1 e 2 estão desacoplados. Para pequenas oscilações eles executam movimento harmônico simples com frequências angulares dadas por

$$\omega_1^{(0)} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad , \quad \omega_2^{(0)} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$$

No caso $k_3 \neq 0$, o movimento deles é acoplado. Queremos ver se existem movimentos análogos ao harmônico simples. Em equilíbrio $x_1 = x_2 = 0$.

As eq de movimento são:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_3 (x_1 + x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - k_3 (x_1 + x_2) \end{cases}$$

Reescrevemos:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_3) x_1 - k_3 x_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -(k_2 + k_3) x_2 - k_3 x_1 \end{cases}$$

Definimos as novas constantes

$$K_1 \equiv k_1 + k_3 \qquad K_2 \equiv k_2 + k_3$$

Nessa forma

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -K_1 x_1 - k_3 x_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 = -K_2 x_2 - k_3 x_1 \end{cases}$$

Procuramos agora uma solução na forma de uma oscilação harmônica simples para o sistema como um todo. Tentemos uma solução do tipo:

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{i\omega t}, \\ x_2(t) = C_2 e^{i\omega t}. \end{cases}$$

Esta é uma solução particular onde as duas partículas oscilam com uma freqüência ω dada. Esta oscilação é chamada de **MODO NORMAL** do sistema

$$\dot{x}_1 = i\omega (C_1 e^{i\omega t}) = i\omega x_1 \quad , \quad \ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$$

Sustituindo nas eq. de mov. temos

$$\begin{cases} -m_1 \omega^2 C_1 \cancel{e^{i\omega t}} = -K_1 C_1 \cancel{e^{i\omega t}} - k_3 C_2 \cancel{e^{i\omega t}} \\ -m_2 \omega^2 C_2 \cancel{e^{i\omega t}} = -K_2 C_2 \cancel{e^{i\omega t}} - k_3 C_1 \cancel{e^{i\omega t}} \end{cases}$$

Tirando os fatores exponenciais que nunca são nulos ficamos com um sistema linear homogêneo para as constantes

C_1 e C_2.

$$\begin{cases} (K_1 - m_1\omega^2)\, C_1 + k_3 C_2 = 0 \\ k_3 C_1 + (K_2 - m_2\omega^2)\, C_2 = 0 \end{cases}$$

Este sistema homogêneo tem solução diferente da solução trivial $C_1 = C_2 = 0$, só no caso em que o determinante do sistema é nulo

$$\begin{vmatrix} K_1 - m_1\omega^2 & k_3 \\ k_3 & K_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Esta eq. chamada de EQUACÃO CARACTERÍSTICA da as freqüências dos modos normais:

$$0 = (K_1 - m_1\omega^2)(K_2 - m_2\omega^2) - k_3^2 = K_1K_2 - (m_1K_2 + m_2K_1)\,\omega^2 + m_1m_2\omega^4 - k_3^2$$

$$K_1K_2 - k_3^2 = \cancel{k_3^2} + k_3(k_1+k_2) + k_1k_2 - \cancel{k_3^2} = k_1k_2 + k_3(k_1+k_2)$$

a eq. fica

$$m_1m_2(\omega^2)^2 - (m_1K_2 + m_2K_1)\,\omega^2 + [k_1k_2 + k_3(k_1+k_2)] = 0$$

A solução para ω^2 é dada por

$$\omega_\pm^2 = \frac{m_1K_2 + m_2K_1 \pm \left\{(m_1K_2 + m_2K_1)^2 - 4m_1m_2[k_1k_2 + k_3(k_1+k_2)]\right\}^{1/2}}{2m_1m_2}$$

Vejamos o radicando

$$m_1^2 K_2^2 + m_2^2 K_1^2 + 2m_1 m_2 K_1 K_2 - 4m_1 m_2 K_1 K_2 + 4m_1 m_2 k_3^2$$

$$= (m_1 K_2 - m_2 K_1)^2 + 4m_1 m_2 k_3^2$$

$$= 4(m_1 m_2)^2 \left[\left(\frac{k_3}{m_1 m_2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{K_2}{m_2} - \frac{K_1}{m_1} \right)^2 \right]$$

Definir:

$$\Omega_1^2 = \frac{K_1}{m_1} \quad , \quad \Omega_2^2 = \frac{K_2}{m_2}$$

Daí obtemos

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) \pm \left[\frac{1}{4}\left(\Omega_1^2 - \Omega_2^2\right)^2 + \left(\frac{k_3^2}{m_1 m_2}\right) \right]^{1/2} > 0$$

As duas soluções são positivas, como corresponde à quadrados de números reais. Assim

$$\omega_\pm = \left\{ \frac{1}{2}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2\right) \pm \left[\frac{1}{4}\left(\Omega_1^2 - \Omega_2^2\right)^2 + \left(\frac{k_3^2}{m_1 m_2}\right) \right]^{1/2} \right\}^{1/2}$$

Escrever

$$\begin{cases} \omega_+^2 = \Omega_1^2 + \frac{1}{2}\Delta\omega^2 \\ \omega_-^2 = \Omega_2^2 - \frac{1}{2}\Delta\omega^2 \end{cases}$$

onde $\frac{1}{2}\Delta\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\Omega_2^2 - \Omega_1^2\right) + \left[\frac{1}{4}\left(\Omega_1^2 - \Omega_2^2\right)^2 + \left(\frac{k_3^2}{m_1 m_2}\right) \right]^{1/2}$

Consideremos o caso simétrico $k_1 = k_2 = k$, $m_1 = m_2 = m$

Daí $\quad K_1 = K_2 = K \quad$ e $\quad \Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$

$$\frac{1}{2}\Delta\omega^2 = \sqrt{\frac{k_3^2}{m_1 m_2}} = \frac{k_3}{m}$$

e as freqüências dos modos normais são

$$\begin{cases} \omega_+^2 = \Omega^2 + \sqrt{\dfrac{k_3^2}{m_1 m_2}} = \dfrac{k+k_3}{m} + \dfrac{k_3}{m} = \dfrac{k}{m} + 2\dfrac{k_3}{m}, \\[2ex] \omega_-^2 = \Omega^2 - \dfrac{k_3}{m} = \dfrac{k+k_3}{m} - \dfrac{k_3}{m} = \dfrac{k}{m}. \end{cases}$$

Procuremos as amplitudes correspondentes aos modos normais

$$(K - m\omega_\pm^2)C_1 + k_3 C_2 = 0$$

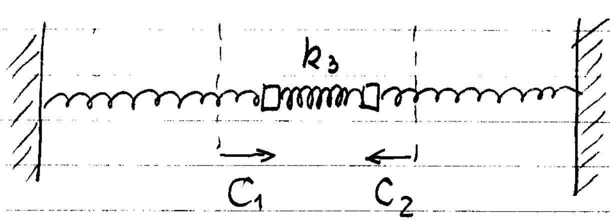
ω_+:

$$\left[k + k_3 - (k + 2k_3)\right] C_1 + k_3 C_2 = 0$$

$$-k_3 C_1 + k_3 C_2 = 0$$

ω_+: $\quad \boxed{C_1 = C_2}$

Os osciladores oscilam em oposição de fase (o CM fica em repouso)



ω_- :

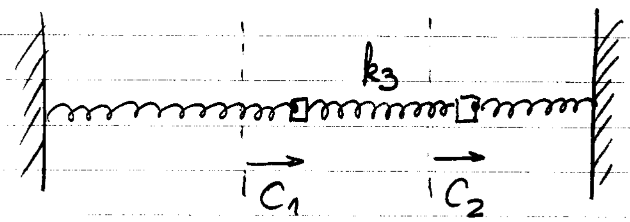
$$(\cancel{k}+k_3-\cancel{k})C_1 + k_3 C_2 = 0$$

$$k_3(C_1+C_2) = 0$$

ou

$$\omega_- \;:\quad \boxed{C_1 = -C_2}$$

Os osciladores oscilam em fase e a mola entre eles é inefetiva!



Neste modo normal o CM se desloca com movimento harmônico simples.

As soluções achadas são 2 soluções particulares do problema que representam os modos normais do sistema. São soluções l. i., de maneira que a solução geral será uma superposição destes dois modos dependendo das condições iniciais.

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} + B_1 e^{i\omega_- t} \\ x_2(t) = C_2 e^{i\omega_+ t} + B_2 e^{i\omega_- t} \end{cases}$$

Temos 4 constantes por determinar (C_1, C_2, B_1, B_2) dadas as condições iniciais do sistema:

$$x_1(0)\;,\; x_2(0),\; \dot{x}_1(0),\; \dot{x}_2(0)\;.$$

No caso geral temos,

$$C_2 = \frac{m_1\omega^2 - K_1}{k_3} C_1 , \qquad (1)$$

e

$$C_1 = \frac{m_2\omega^2 - K_2}{k_3} C_2 . \qquad (2)$$

Podemos verificar que a expressão (1) é mais adequada para ω_+ e (2) para ω_-.

A) $\omega_+^2 = \Omega_1^2 + \frac{1}{2}\Delta\omega^2$, $\Omega_1^2 = \frac{K_1}{m_1}$

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{m_1}{k_3}\left(\frac{\cancel{K_1}}{\cancel{m_1}} + \frac{1}{2}\Delta\omega^2\right) - \frac{\cancel{K_1}}{\cancel{k_3}} = \frac{m_1\Delta\omega^2}{2k_3}$$

<u>Def</u> Fator $\varkappa$

$$\varkappa^2 = \frac{k_3}{\sqrt{m_1 m_2}}$$

$k_3 = \varkappa^2\sqrt{m_1 m_2}$

$$\boxed{\left(\frac{C_2}{C_1}\right)_+ = \frac{m_1\Delta\omega^2}{2\varkappa^2\sqrt{m_1 m_2}} = \left(\frac{\Delta\omega^2}{2\varkappa^2}\right)\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}}$$

B) para ω_- procedemos da mesma forma com (2)

$$\boxed{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)_- = -\frac{\Delta\omega^2}{2\varkappa^2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}} \text{ , pq } \omega_-^2 = \Omega_2^2 - \frac{1}{2}\Delta\omega^2$$

o vetor $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}_+$ é ortogonal ao vetor $\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}_-$

usando como 'peso' a matriz das massas:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix},$$

ou seja:

$$(C_1^*, C_2^*)_+ \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}_- = 0 .$$

Sendo estes 'modos' linearmente independentes, a solução geral será uma combinação linear deles:

$$x_1(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} - C_2' e^{i\omega_- t} \frac{\Delta\omega^2}{2K^2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}},$$

$$x_2(t) = C_1 e^{i\omega_+ t} \frac{\Delta\omega^2}{2K^2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + C_2' e^{i\omega_- t} .$$

Em geral as constantes são complexas. Escrevemos:

$$C_1 = A_+ e^{i\theta_+},$$

$$C_2' = A_- e^{i\theta_-},$$

onde as amplitudes (A_+, A_-) são reais.

Tomando a parte real para as soluções, obtemos:

$$x_1(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \theta_+) - A_- \frac{\Delta\omega^2}{2K2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \cos(\omega_- t + \theta_-),$$

$$x_2(t) = A_+ \frac{\Delta\omega^2}{2K2}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \cos(\omega_+ t + \theta_+) + A_- \cos(\omega_- t + \theta_-),$$

com 4 constantes $(A_+, \theta_+, A_-, \theta_-)$ por determinar a partir das condições iniciais.

Caso $A_- = 0$, o sistema estará no modo normal (A_+, θ_+) e viceversa para $A_+ = 0$.

O formalismo se complica, caso queiramos incluir atrito. Usando coeficientes de atrito (b_1, b_2) a forma mais simples é:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -b_1 \dot{x}_1 - K_1 x_1 - k_3 x_2,$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -b_2 \dot{x}_2 - K_2 x_2 - k_3 x_1.$$

Procedendo da mesma forma que para os modos normais, procuramos soluções na forma

$$x_1 = C_1 e^{pt},$$

$$x_2 = C_2 e^{pt}.$$

Em geral p será real ou complexo.

A equação secular fica na forma:

$$\begin{vmatrix} K_1 + b_1 p + m_1 p^2 & k_3 \\ k_3 & K_2 + b_2 p + m_2 p^2 \end{vmatrix} = 0,$$

que é uma 'genuina' eq. quárctica para p:

$$m_1 m_2 p^4 + (m_1 b_2 + m_2 b_1) p^3 + p^2 (m_1 K_2 + m_2 K_1 + b_1 b_2)$$
$$+ p (b_1 K_2 + b_2 K_1) + K_1 K_2 - k_3^2 = 0.$$

No caso que $b_1 = b_2 = 0$, temos uma eq. quadrática para p^2 (como antes). No caso geral, precisamos encontrar as raízes de um polinômio de grau quártico. Note que todos os coeficientes são reais. Portanto as soluções serão reais, ou em pares de complexos conjugados.

a) soluções subamortecidas;

dois pares de complexos conjugados:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\gamma_1 \pm i\omega_1 \\ p_2 &= -\gamma_2 \pm i\omega_2 \end{aligned}\right\} \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0$$

b) Uma solução subamortecida e as outras superamortecidas:

$$\left.\begin{array}{l} p = -\gamma \pm i\omega, \\ p_1 = -\gamma_1, \; p_2 = -\gamma_2 \; . \end{array}\right\} \gamma, \gamma_1, \gamma_2 > 0$$

c) todas as soluções superamortecidas:

$$p_1 = -\gamma_1 \; , \; p_2 = -\gamma_2 \; , \; p_3 = -\gamma_3 \; , \; p_4 = -\gamma_4$$